16/3/2016

$f: A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$). Η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$
$\exists\, \delta > 0$ ($\delta(x_0, \epsilon)$) ώστε $\forall x \in A$, αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Παραδείγματα: (α) $f(x) = 10x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\epsilon > 0$

Αναζητούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{10x}_{f(x)} - \underbrace{10x_0}_{f(x_0)}| < \epsilon$$

Μια προφανής επιλογή του δ είναι να επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{10}$

* Παρατήρηση: καταφέραμε να επιλέξουμε ένα δ που εξαρτάται αποκλειστικά από το ϵ κι όχι από το σημείο x_0. *

Έτσι για $\delta = \frac{\epsilon}{10}$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{10x} - \underbrace{f(y)}_{10y}| < \epsilon$

(β) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$

Η g συνεχής. Θα το δείξουμε με τον ϵ-δ ορισμό.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\epsilon > 0$

Αναζητούμε ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{x^2}_{g(x)} - \underbrace{x_0^2}_{g(x_0)}| < \epsilon$$

Θα επιλέξουμε το δ ώστε $0 < \delta \leq 1$

Έτσι όταν $|x - x_0| < \delta \leq 1$

Θα έχουμε $|x| = |x - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0|$
$< 1 + |x_0|$

Έτσι
$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x + x_0| \cdot |x - x_0| \\ &\leq (|x| + |x_0|)\, |x - x_0| \\ &< (1 + 2|x_0|)\, |x - x_0| \\ &< (1 + 2|x_0|)\, \delta \end{aligned}$$

Έτσι θέτοντας $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right\}$ έχουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{x^2}_{g(x)} - \underbrace{x_0^2}_{g(x_0)}| < \epsilon$$

Άρα συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παρατηρούμε ότι το δ εξαρτάται εκτός του ϵ και από το x_0.
(και μάλιστα για μεγάλα x_0 χρειαζόμαστε πιο μικρό δ)

Ερώτημα: Μήπως δεν κάναμε βέλτιστη επιλογή του δ και θα μπορούσαμε να επιλέξουμε δ που να εξαρτάται αποκλειστικά από το ϵ κι όχι από το x_0;

Απάντηση: Όχι. Θα δείξω ότι τέτοιο δ δεν υπάρχει.

<u>Ισχυρισμός</u>: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $\nexists\ \delta > 0$ με την ιδιότητα:
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$: <u>αν $|x-y| < \delta$ τότε $|x^2 - y^2| < \epsilon$</u> $(*)$

Απόδειξη:
Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\exists$ τέτοιο δ.
$\forall x > 0$ έχουμε τα εξής: $\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - x\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$.
άρα από την $(*)$:

$$\left|\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \epsilon$$

$$\left|x^2 + x\delta + \frac{\delta^2}{4} - x^2\right| < \epsilon$$

$$x\delta + \frac{\delta^2}{4} < \epsilon.$$

δηλαδή $x < \dfrac{\epsilon - \frac{\delta^2}{4}}{\delta}$, $\forall x > 0$ Άτοπο.
Επομένως $\nexists$ τέτοιο δ.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν $(\forall\, \epsilon > 0)$, $(\exists\, \delta > 0)$ ώστε $\forall\, x, y \in A$ αν:
$|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Παρατήρηση: Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.

Παραδείγματα: (α) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 10x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
(Για $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{10}$)

(β) Η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) $h:[-M,M]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=x^2$. Θα δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη: $|h(x)-h(y)| = |x^2-y^2| = |x+y|\cdot|x-y|$
$\leq (|x|+|y|)\,|x-y|$
$\leq (M+M)\,|x-y| = 2M\,|x-y|$

Έστω $\epsilon>0$ θέτουμε $\delta=\frac{\epsilon}{2M}$, $\forall x,y\in[-M,M]$ αν $|x-y|<\delta=\frac{\epsilon}{2M}$

Τότε $|h(x)-h(y)|\leq 2M|x-y| < 2M\cdot\frac{\epsilon}{2M}=\epsilon$
Συνεπώς είναι συνεχής.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν $(\exists\, c>0)$ ώστε $\forall x,y\in A: |f(x)-f(y)|\leq c\,|x-y|$

Πρόταση: Αν η $f:A\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\frac{\epsilon}{c}$ (όπου c η σταθερά της συνθήκης Lipschitz)
$\forall x,y\in A$ με $|x-y|<\delta=\frac{\epsilon}{c}$: $|f(x)-f(y)|\leq c\,|x-y| < c\cdot\frac{\epsilon}{c}=\epsilon$
Άρα ομοιόμορφα συνεχής

Παράδειγμα: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=|x|$
$|f(x)-f(y)| = ||x|-|y|| \leq |x-y|$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$
Η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1.
Άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής

Πρόταση: Αν I διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε να $\exists\, M>0: |f'(x)|\leq M$, $\forall x\in I$. Τότε f ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:
Θα δείξω ότι $|f(x)-f(y)|\leq M\,|x-y|$, $\forall x,y\in I$.
Υποθέτω ότι $x,y\in I$ με $x<y$
Από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού:

$\exists$ ένα $\xi \in (x,y)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$\Rightarrow \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(\xi)| \leq M$

Άρα $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ (ομοίως αν $y<x$)

Θεώρημα: (Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας με χρήση ακολουθιών)
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A, αν $x_n - y_n \to 0$ τότε $f(x_n)-f(y_n) \to 0$

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$
Θα δείξω ότι $f(x_n)-f(y_n) \to 0$
Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η f ομοιόμορφα συνεχής, $(\exists \delta>0)$ ώστε $\forall x,y \in A$ αν: $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (1)
Εφόσον $x_n - y_n \to 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - y_n| < \delta$
Άρα λόγω της (1): $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$.
Συνεπώς $f(x_n)-f(y_n) \to 0$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι αν $x_n - y_n \to 0$ τότε $f(x_n)-f(y_n)\to 0$ και θα δείξω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Άρα $(\exists \varepsilon>0)$ ώστε: $(\forall \delta>0)$ $\exists x,y \in A$ ώστε $|x-y|<\delta$ και $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$ (2)
Εφαρμόζοντας $\forall n \in \mathbb{N}$ την (2) για $\delta = \frac{1}{n}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία $x_n, y_n \in A$ με $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ και $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Τότε $x_n - y_n \to 0$. Άρα από την υπόθεση μας $f(x_n)-f(y_n)\to 0$ άτοπο, εφόσον $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα f ομοιόμορφα συνεχής.

Παρατηρηση: Το παραπανω θεωρημα ειναι ο κυριος τροπος για να δειχνουμε οτι μια συναρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης. Αρκει να βρουμε δυο ακολουθιες $(x_n), (y_n)$ στο A, με $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

Παραδειγματα: (α) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$

Θετουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$.

Τοτε $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, ενω $g(x_n) - g(y_n) = (n + \frac{1}{n})^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$

Συνεπως η g δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης.

(β) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$

Θετουμε $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$. Τοτε $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to 0$

Ενω $f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - n - 1 = -1 \to -1 \neq 0$

Η f δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης.

(γ) Η συναρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

Π.Ο. $\mathbb{R}$ ειναι διαστημα, f παραγωγισιμη με $f'(x) = \cos x$.

$|f'(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Η f ειναι ομοιομορφα συνεχης.

(δ) Ομοιως για την $g(x) = \cos x$

$|g'(x)| = |-\sin x| \leq 1 \ \forall x$. Αρα η g ομοιομορφα συνεχης.

(ε) $f(x) = \sin(5x)$

$f'(x) = 5\cos(5x)$

$|f'(x)| \leq 5 \ \forall x$.

(στ) $f(x) = \sin(x^2)$